BEM

حوليات في الرياضيات

العربي صلاح الدين

4ème AM

مواضيع مقترحة
لشهادة التعليم المتوسط
مع حلول مفصلة

دار المعرفة

الأسئلة

امتحان بكالوريا 2008

الموضوع الأوّل:

التمرين رقم 01

1- حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$

بيّن أنّ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
لتكن A,B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$:

برهـــــــن أنّ $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ وأنّ $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$

حــــيــــث θ,θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

ب) اكتب Z على الشكل الأسي.

جـ) اكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C صورة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين رقم 02

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
نعتبر المستوي (P) الذي معادلته :

$$x+2y-z+7=0$$

والنقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

1- تحقق أن النقط A,B و C ليست على استقامية ، ثم بيّن أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي:

$$y+2z-2=0$$

1- أ - تحقق أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثمّ عيّن تمثـيـلا وسيـطـيـا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

2- لتكن G مركز الجملة $\{(A,1)(B,\alpha)(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$

عيّن α حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ).

التمرين رقم 03

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ - بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى المجال I.

2) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1}=f(u_n)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

ب) عيّن النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين رقم 04

I- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى

المنحنى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند النقطة A يساوي $(-e)$.

II - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسّر هذه النتيجة بيانيا.

(نذكر أنّ $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

جـ) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيتيها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) ارسم المنحنى (C_g).

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0.

III- لتكن الدالة k المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

انظر إجابة هذا الموضوع صفحة 6

امتحان بكالوريا 2008

الموضوع الثاني:

التمرين رقم 01

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عيّن الجواب الصحيح معلّلا اختيارك:

نعتبر في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

والمستوى (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1) المستوى (P) هو:

ج1) (BCD) ، ج2) (ABC)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو:

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ، ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$

3) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي:

ج1) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

التمرين رقم 02

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$u_0=\dfrac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n=\frac{2}{3}u_n+2$$

1) أ - ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2}{3}x+2$

ب - باستعمال الرسم السابق ، مثّل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n\le 6$$

ب - تحقق أن (u_n) متزايدة.

جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-6$.

أ- أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- اكتب عبارة (u_n) بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين رقم 03

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات

المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث:

$z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$

عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث $z_C=\dfrac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ- برهن أن عبارة التشابه S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي:

$$z'-z_0=ke^{i\theta}\left(z-z_0\right)$$

ب – تطبيق :

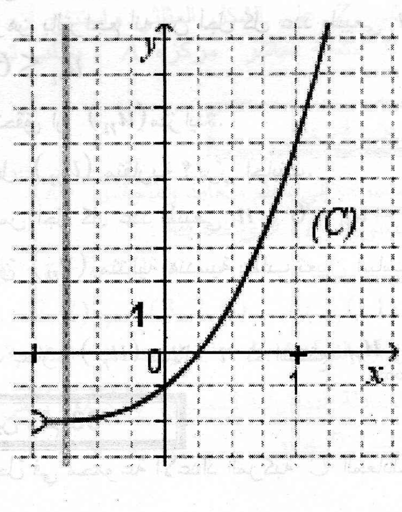
عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـــ :

$$z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$$

التمرين رقم 04

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرّفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يأتي:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$



1- أ) بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$.

جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

وفسّر النتيجة بيانياً.

ج) احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

وفسر النتيجتين بيانياً.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 - نأخذ $\alpha\simeq 0,26$

أ) عيّن مدور العدد $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ).

4 - أ) اكتب $f(x)$ على الشكل:

$f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان .

ب) عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$.

انظر إجابة هذا الموضوع صفحة 12

موضوع مقترح لبكالوريا 2009

التمرين رقم 01

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، لتكن (S) سطح الكرة ذات المركز $\Omega(1,1,-1)$ ونصف القطر $2\sqrt{2}$. نعتبر النقطتين $A(-1,-1,-1)$ و $B(1,1,2\sqrt{2}-1)$ من (S)، نسمي (P) و (Q) المستويين المماسين لسطح الكرة (S) عند النقطتين A و B على الترتيب:

أجب بصحيح أم خاطئ عن كل إجابة من الإجابات المقترحة التالية:

❶ معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي: $x+y-z+1=0$

❷ المستويان (P) و (Q) متعامدان.

❸ المستويان (P) و (Q) متقاطعان وتقاطعهما مستقيم (D) تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t+2 \\ z=-2\sqrt{2}-1 \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$$

❹ بعد النقطة Ω عن المستقيم (P) يساوي 4.

❺ لتكن H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستقيم (D)، البعد $H\Omega$ يساوي 4.

التمرين رقم 02

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(z-2i)(z^2-2z+2)=0$$

ثم اكتب كل حل من حلول المعادلة على الشكل الأسي.

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما على الترتيب $z_A=1+i$ و $z_B=2i$

من أجل كل مركب z يختلف عن z_A نرفق العدد z' حيث :

$$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$$

أ) عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي من أجلها يكون z' تخيلي بحث.

- بيّن أنّ النقطة B تنتمي إلى (E).

- عيّن ثم أنشئ (E).

ب) عيّن المجموعة (F) للنقطة M من المستوي ذات اللاحقة z والتي من أجلها يكون $|z'|=1$.

- عيّن ثم أنشئ (F).

❸ ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران R ولاحقة I' صورة النقطة $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ بالدوران R.

ب) ماهي صورة كل من (E) و (F) بالدوران R؟علل.

التمرين رقم 03

❶ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$

أ) ادرس اتّجاه الدالة f.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من I فإ[ن] $f(x)$ ينتمي إلى I.

❷ (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0=0 \text{ و } u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$$

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ u_n ينتمي إلى I.

❸ أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

ب) ادرس اتّجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

د) بيّن أنّ النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l)=l$ ثم احسب l.

التمرين رقم 04

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I- ❶ احسب : $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ ادرس تغيرات الدالة f وأنشئ المنحنى (C).

❸ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب التكامل:

$$I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}$$

ب) بيّن أنّ : $I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1) I_n$

جـ) احسب I_4, I_3, I_1 .

II- ليكن m ، عددا حقيقيّـا موجبا و A نقطة من (C) فاصلتها m ، ليكن (T_m) المماس للمنحنى (C) عند النقطة A.

❶ اكتب معادلة المماس (T_m) بدلالة m .

❷ عيّن الأعداد الحقيقية m التي من أجلها (T_m) يمر بالمبدأ O .

III- ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : $y = \frac{1}{e^2} x$.

❶ نضع من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما :

$$\varphi_1(x) = x - e \ln x$$

ادرس تغيرات الدالة φ_1.

❷ نضع من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما :

$$\varphi_2(x) = x + e \ln x$$

أ) ادرس تغيرات الدالة φ_2.

ب) بيّن أنّ المعادلة $\varphi_2(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

ليكن α هذا الحل.

جـ) استنتج أن المعادلة $\varphi_2(x) = 0$ تقبل حلا وحيداً في المجال $]0; +\infty[$.

❸ عيّن نقط تقاطع (C) و (Δ).

انظر إجابة هذا الموضوع صفحة 15

الأجوبة

إجابة امتحان بكالوريا 2008

الموضوع الأوّل:

التمرين رقم 01

1-حل المعادلة $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$

حساب المميز Δ :

$\Delta = \left[-(1+2i)\right]^2 - 4(1)(-1+i)$ ومنه $\Delta = 1$

وبالتالي حلا المعادلة z'', z' حيث :

$z'' = \frac{1+2i-1}{2}, z' = \frac{1+2i-1}{2}$ ومنه

$$z'' = 1+i, z' = i$$

بما أن $|z'| = 1$ و $|z''| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ فإن

$$z_2 = 1+i \text{ و } z_1 = i$$

تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$ ومنه $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} z_2$

لدينا : $|z_2| = \sqrt{2}$ ومنه $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي أنّ $\frac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_2

إذن :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2008}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2008}}{2^{2008}}(\cos 502\pi + i \sin 502\pi)$$

ومنه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{(2)^{\frac{1}{2}(2008)}}{2^{2008}}(1+0i) = \frac{2^{1004}}{2^{2008}}$

$$\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{1}{2^{1004}}}$$

إذن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) – أ) إثبات أن $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$:

$$e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0}$$

ومنه $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = \cos 0 + i\sin 0$ أي $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$

$$\boxed{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$$

– بما أن $e^{(i\theta_1 - i\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2}$ فإن:

$e^{(i\theta_1 - i\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}}$ حسب النتيجة السابقة

ومنه $\boxed{\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{(i\theta_1 - i\theta_2)}}$

ب) كتابة العدد Z على شكله الأسي:

أي $Z = \frac{i}{i-1} = \frac{i(-1-i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1}{2}(1-i)$

$$Z = \frac{1}{2}\overline{z_2}$$

أي $|Z| = \frac{1}{2} \times |\overline{z_2}| = \frac{1}{2} \times |z_2|$ أي $|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و $arg(Z) = arg\left(\frac{1}{2}\right) + arg(\overline{z_2}) = arg(\overline{z_2})$

$arg(Z) = -\frac{\pi}{4}$ وبالتالي $\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

جـ) كتابة العدد Z على شكله المثلثي:

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)}$$

$Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ أي $arg(Z) = arg\left(\frac{z_2-1}{z_1-1}\right)$ و

$$|Z| = \left|\frac{z_2-1}{z_1-1}\right|$$

ونعلم أنّ $arg\left(\frac{z_2-1}{z_1-1}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ و

$$\left|\frac{z_2-1}{z_1-1}\right| = \frac{|z_2-1|}{|z_1-1|} = \frac{AC}{AB}$$

ومنه $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{4}$ و $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{4}$ و $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$

النقطة C صورة B بتشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

التمرين رقم 02

1– تبيان أن النقط B, A و C ليست على استقامية:

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

النقط B, A و C على استقامية إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

أي يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ومنه

$\begin{cases}-3 = k\\-2 = 2k\\1 = -k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k = -3\\k = -1\end{cases}$ ومنه $-1 = -3$ وهذا تناقض

إذن : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط B, A و C ليست على استقامية.

2– تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي:

$$y + 2z - 2 = 0$$

شعاع ناظمي للمستوي الذي معادلته $y + 2z - 2 = 0$

هو $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ ومنه

$\begin{cases}n_1.\overrightarrow{AB} = 0\times1 + 1\times2 + 2\times(-1)\\n_1.\overrightarrow{AC} = 0\times(-3) + 1\times(-2) + 2\times1\end{cases}$ أي $\begin{cases}n_1.\overrightarrow{AB} = 0\\n_1.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$

أي $\overrightarrow{n_1}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

نعوض إحداثيات A في المعادلة $y + 2z - 2 = 0$ أي

$$0 + 2\times1 - 2 = 0$$

أي أن النقطة A تنتمي إلى المستوي الذي معادلته

$$x + 2z - 2 = 0$$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$y + 2z - 2 = 0$$

2-أ- شعاع ناظمي للمستوي (P) هو $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

ومنه $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\times1+1\times2+2\times(-1)$ أي $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$

أي أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

بوضع : $z=t$ فإن
$$\begin{cases}x+2y-z+7=0\\ y+2z-2=0\\ z=t\end{cases}$$

أي
$$\begin{cases}x+2y-z+7=0\\ y=-2z+2\\ z=t\end{cases}$$

أي
$$\begin{cases}x+2(-2t+2)-t+7=0\\ y=-2t+2\\ z=t\end{cases}$$
أي
$$\boxed{\begin{cases}x=5t-11\\ y=-2t+2\ ,t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}}$$

ب-حساب المسافة بين A والمستقيم (Δ) :

لتكن A' المسقط العمودي لـ A على (Δ)

و $d(A,(P))$ المسافة بين A والمستوي (P)

أي $AA'=d(A,(P))$ لأن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

ومنه $AA'=\dfrac{|1\times2+2\times0+(-1)\times1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}}$ أي

$AA'=\dfrac{1}{\sqrt6}$ أي $\boxed{AA'=\dfrac{\sqrt6}{6}}$

1- تعيين قيمة العدد α :

لتكن (x_G,y_G,z_G) إحداثيات النقطة G

أي
$$\begin{cases}x_G=\dfrac{1\times2+\alpha\times(3)+\beta\times(--1)}{1+\alpha+\beta}\\ y_G=\dfrac{1\times(0)+\alpha\times(2)+\beta\times(-2)}{1+\alpha+\beta}\\ z_G=\dfrac{1\times(1)+\alpha\times(0)+\beta\times(2)}{1+\alpha+\beta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}\\ y_G=\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}\\ z_G=\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}\end{cases}$$

G تنتمي إلى (Δ) أي G تنتمي إلى (P) و (ABC)

أي $\begin{cases}x_G+2y_G-z_G+7=0\\ y_G+2z_G-2=0\end{cases}$ أي

أي
$$\begin{cases}\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}+2\times\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}-\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}+7=0\\ \dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}+2\times\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2+3\alpha-\beta+4\alpha-4\beta-1-2\beta+7+7\alpha+7\beta}{1+\alpha+\beta}=0\\ \dfrac{2\alpha-2\beta+2+4\beta-2-2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}=0\end{cases}$$

أي $\begin{cases}14\alpha+8=0\\ 0=0\end{cases}$ أي $\alpha=-\dfrac{8}{14}$ ومنه $\boxed{\alpha=-\dfrac{4}{7}}$

التمرين رقم 03

1) أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي :

من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f'(x)=\dfrac{6}{(-x+4)^2}$

$f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب-من أجل كل عدد حقيقي x من I أي $1\le x\le 2$

وبما أن f متزايدة تماما على المجال I ، فإنّ: $f(1)\le f(x)\le f(2)$

وبما أن $f(1)=1$ و $f(2)=2$ فإن $1\le f(x)\le 2$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)\in I$

2)-أ- نعتبر $p(n)$ الخاصية $u_n\in I$ حيث n عدد طبيعي

لدينا $u_0=\dfrac{3}{2}$ ومنه $u_0\in I$ أي أن $p(0)$ صحيحة

نفرض أن $p(k)$ حيث k عدد طبيعي ونبرهن أنّ $p(k+1)$ صحيحة.

إذا كان $u_k \in I$ أي $1 \le u_k \le 2$ ومنه

$f(1) \le f(u_k) \le f(2)$ لأن f متزايدة تماما على المجال I.

ومنه $1 \le u_{k+1} \le 2$ وبالتالي $u_{k+1} \in I$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in I$

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و $u_1 = f(u_0) = \dfrac{7}{5}$ ومنه

$u_0 > u_1$

نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n > u_{n+1}$

نعتبر $p'(n)$ الخاصية $u_n > u_{n+1}$ حيث n عدد طبيعي

لدينا $u_0 > u_1$ أي أن $p'(0)$ صحيحة

نفرض أن $p'(k)$ حيث k عدد طبيعي ونبرهن أنّ $p'(k+1)$ صحيحة

إذا كانت $u_k > u_{k+1}$ فإنّ:

$f(u_k) > f(u_{k+1})$ لأن الدالة f متزايدة تماما على I.

ومنه $u_{k+1} > u_{k+2}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > u_{n+1}$.

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

3)-أ- نعتبر $p_1(n)$ الخاصية: $u_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 1}$

من أجل $n = 0$ فإنّ $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^0 + 1} + u_0 = 1$ أي أن

$p_1(0)$ صحيحة.

نفرض أن $p_1(k)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي ونبرهن أن $p_1(k+1)$ صحيحة:

إذا كانت $u_k = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1}$ وبما أن

$u_{k+1} = f(u_k)$ فإن

$$u_{k+1} = \frac{1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1} + 2}{-\left(1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1}\right) + 4}$$

ومنه

$$u_{k+1} = \frac{3 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1}}{3 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1}}$$

ومنه

$$u_{k+1} = \frac{\dfrac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 4}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1}}{\dfrac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 4}{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^k + 2}$$

ومنه $u_{k+1} = \dfrac{3\left(\frac{3}{2}\right)^k+2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^k+2} + \dfrac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^k+2}$

$$u_{k+1}=1+\frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^k+2}$$

وبالتالي: $u_{k+1}=1+\dfrac{2}{2\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k+1\right)}$

$$u_{k+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+1}$$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)}=0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)=+\infty$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1}$

التمرين رقم 04

I- تعيين قيمتي a و b:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-2,+\infty[$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي :

أي $f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$

$$f'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$$

لدينا $A(-1,1)\in(C_f)$ ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$:

أي $\begin{cases}f(-1)=1\\ f'(-1)=-e\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}(-a+b)e+1=1\\ (a-b+a)e=-e\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}(-a+b)e=0\\ (a-b+a)e+e=0\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}(-a+b)=0\\ (2a-b)e+e=0\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}(-a+b)=0\\ (2a-b+1)e=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}b=a\\ 2a-b+1=0\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}b=a\\ a+1=0\end{cases}$

وبالتالي $\boxed{\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}}$

II-أ) لدينا $g(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$ وبوضع $u=-x$

$$\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim_{u\to-\infty}ue^{u}=0$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$

وبالتالي $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1}$

أي أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$

ب) دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-2,+\infty[$

ودالتها المشتقة g' حيث:

$$g'(x)=-e^{-x}-(-x)e^{-x}-(-e^{-x})=-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}$$

$$g'(x)=xe^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ هي من إشارة x لأن $e^{-x}>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

أي : $g'(x)>0$ من أجل $x\in]0,+\infty[$

$g'(x)<0$ من أجل $x\in]-2,0[$

$g'(x)=0$ من أجل $x=0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-2,0[$.

جدول التغيرات :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	e^2+1 ↘	0 ↗	1

جـ) الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $[-2,+\infty[$ ودالتها المشتقة g'' حيث :

$g''(x)=e^{-x}-xe^{-x}$ ومنه

$$g''(x)=(1-x)e^{-x}$$

ندرس إشارة $g''(x)$:

إشارة $g''(x)$ هي نفس إشارة $x-1$ لأن $e^{-x}>0$

$g''(x)>0$ من أجل $x\in]-2,1[$

$g''(x)<0$ من أجل $x\in]1,+\infty[$

$g''(x)=0$ من أجل $x=1$

إذن : $g''(x)$ تنعدم من أجل $x=1$ مغيّرة إشارتها أي أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف $I(1,g(1))$.

ومنه $I(1,-2e^{-1}+1)$ هي نقطة انعطاف.

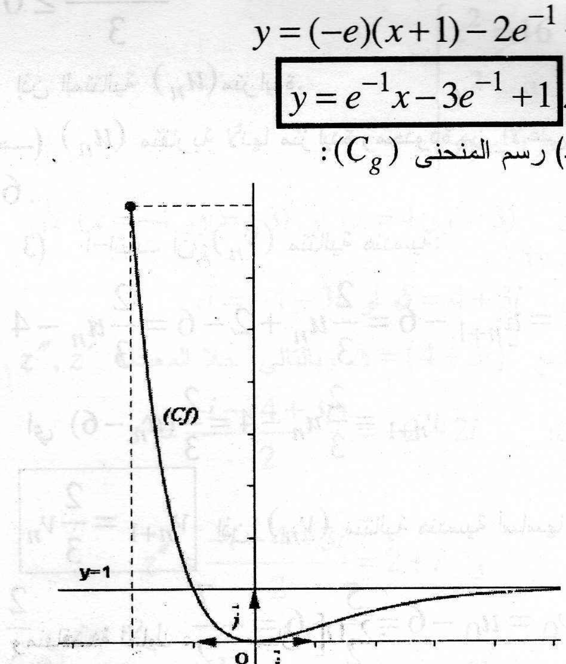
د) كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I :

$y=g'(1)(x+1)+g(1)$ ومنه

$$y=(-e)(x+1)-2e^{-1}+1$$

ومنه $\boxed{y=e^{-1}x-3e^{-1}+1}$

هـ) رسم المنحنى (C_g) :



و) تعيين α و β :

H دالة أصلية للدالة $x\to g(x)-1$ على المجال $[-2,+\infty[$ إذا وفقط إذا كانت H قابلة للاشتقاق على $[-2,+\infty[$ و $H'(x)=g(x)-1$

الدالة H قابلة للاشتقاق على $[-2,+\infty[$

و $H'(x)=\alpha e^{-x}-e^{-x}(\alpha x+\beta)$ أي

$$H'(x)=(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}$$

لدينا من أجل كل x من المجال $[-2,+\infty[$:

$$H'(x)=g(x)-1$$

أي $(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ أي

$$-\alpha x+\alpha-\beta=-x-1$$

$\begin{cases}-\alpha=-1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}$ ومنه $\boxed{\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}}$

ومنه $H(x)=(x+2)e^{-x}$

لدينا $H'(x)=g(x)-1$ أي

$$g(x)=H'(x)+1$$

إذا كانت G دالة أصلية للدالة g والتي تنعدم من أجل القيمة 0 فإن

$G(x)=H(x)+x+c$ و $G(0)=0$

ومنه $H(0)+0+c=0$ ومنه $2+c=0$

ومنه $c=-2$

وبالتالي: $\boxed{G(x)=(x+2)e^{-x}+x-2}$

III) الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[-2,+\infty[$

و $k'(x)=2xg'(x^2)$

ومنه $k'(x)=2x^3e^{-x^2}$ ومنه

$$k'(x)=(2x^2e^{-x^2})x$$

إشارة $k'(x)$ هي من إشارة x لأن:

$2x^2e^{-x^2}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x

وبالتالي الدالة k متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-2,0[$.

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$		0	
$k(x)$	$-5e^{-4}+1$ ↘	0	↗ 1

إجابة امتحان بكالوريا 2008

الموضوع الثاني:

التمرين رقم 01

1) ج2 (ABC) لأن $1-3(-1)-4=0$ أي $4-4=0$ ومنه $A\in(P)$

و $4-3(0)-4=0$ أي $4-4=0$ ومنه $B\in(P)$

و $-2-3(-2)-4=0$ أي $4-4=0$ ومنه $C\in(P)$

و $3-3(1)-4=0$ أي $-4=0$ ومنه: D لا تنتمي إلى (P).

2) ج2 $\overrightarrow{n_2}(-2,0,6)$ لأنه بضرب طرفي معادلة المستوي (P) في العدد -2 نجد:

$-2x+6z+8=0$

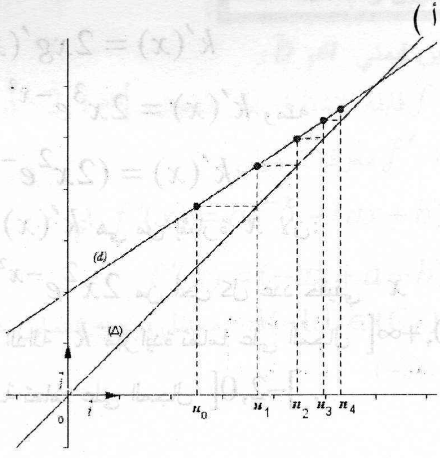
وبالتالي: الشعاع الناظمي للمستوي (P) هو $\overrightarrow{n_2}(-2,0,6)$.

3) ج3 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ لأن:

$$\frac{|1\times(3)-3\times(1)-4|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

التمرين رقم 02

1) أ)



ب) تمثيل الحدود u_4,u_3,u_2,u_1,u_0

جـ) من الرسم فإن المتتالية (u_n) متزايدة وتقاربها هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (d).

2) أ- نعتبر الخاصية $u_n\le 6$ حيث n عدد طبيعي

من أجل $n=0$ فإن $u_0=\frac{5}{2}\le 6$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n\le 6$

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\le 6$

إذا كان $u_n\le 6$ فإن $\frac{2}{3}u_n\le\frac{2}{3}6$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\le 4$ ومنه $\frac{2}{3}u_n+2\le 6$ وبالتالي $u_{n+1}\le 6$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$

ب)- التحقق أن (u_n) متزايدة:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n=\frac{6-u_n}{3}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$ فإن:

$$\frac{6-u_n}{3}\ge 0$$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ) (u_n) متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6.

3) أ-إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{2}{3}u_n+2-6=\frac{2}{3}u_n-4$$

أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-4=\frac{2}{3}(u_n-6)$

إذن $\boxed{v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n}$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدّها الأول $v_0=u_0-6=\frac{5}{2}-6=-\frac{7}{2}$

ب) عبارة الحد العام : (u_n)

لدينا: $v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

وبما أن $\boxed{u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right)$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $0 < \left(\frac{2}{3}\right) < 1$ وبالتالي

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6}$$

التمرين رقم 03

1- حلّ المعادلة : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

$\Delta = (i)^2 - 4\times1\times(-2-6i)$ ومنه $\Delta = 7 + 24i$

ليكن $\delta = x + iy$ حيث $\delta^2 = \Delta$ أي

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ y^2 = x^2 - 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

يعني $\begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ xy = 12 \end{cases}$

أي $(x = 4$ و $y = 3)$ أو $(x = -4$ و $y = -3)$ لأن: $xy > 0$

إذن : $\delta = 4 + 3i$ أو $\delta = -4 - 3i$

نضع $\Delta = (4+3i)^2$ وبالتالي حلا المعادلة z'', z'

حيث: $z' = \frac{-i - (4+3i)}{2} = -2 - 2i$

و $z'' = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i$

2) بما أن ω هي مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$

فإن ω منتصف $[AB]$.

وبالتالي $z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2}$ ومنه $\boxed{z_\omega = -\frac{1}{2}i}$

4) كتابة z_C على الشكل الجبري :

لدينا $z_C = \frac{4-i}{1+i}$ ومنه $z_C = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

ومنه $\boxed{z_C = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i}$

إثبات أن C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

لدينا: $|z_C - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \frac{5}{2}$

و $|z_B - z_A| = |-4-3i| = |-(4+3i)| = |4+3i| = 5$

أي $\omega C = \frac{5}{2}$ و $AB = 5$ وبالتالي $\omega C = \frac{1}{2}AB$

إذن : C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4-أ - ليكن S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ لدينا $S(M_0) = M_0$

ومن أجل كل نقطة $M(z)$ تختلف عن $M_0(z_0)$:

$$\begin{cases} M_0M' = kM_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta \end{cases}$$

من أجل $M \neq M_0$ أي $z \neq z_0$

بما أنّ: $M_0M' = kM_0M$ فإنّ :

$|z' - z_0| = k|z - z_0|$ ومنه $k = \frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|}$

أي $(1)\ldots.\ k = \left|\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right|$

وبما أن $\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta$ فإن:

$(2)\ldots..\ Arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta$

من (1) و(2) نجد أن : $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = ke^{i\theta}$

وبالتالي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$ ......(3)

من أجل $M = M_0$ لدينا $S(M_0) = M_0$ أي إذا كان $z = z_0$ فإنّ $z' = z_0$ ومنه المساواة (3) محققة وبالتالـــي عبارة التشابه S هي $\boxed{z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)}$

ب) التحويل S المعرف بـــ :

$z' - z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$ هو تشابه مباشر مركزه النقطة $M_0(z_0)$ حيث:

$z_0 = -\frac{1}{2}i$ ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

التمرين رقم 04

أ)- جدول تغيرات الدالة g :

$g(0) = -\frac{1}{2}$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

ب)- الدالة g مستمرة على المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

و $g(0) < 0 < g\left(\frac{1}{2}\right)$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ حيث $g(\alpha) = 0$

وبما أن g متزايدة تماما على المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ فإن العدد α وحيد.

جـ) إشارة $g(x)$

من أجل $x = \alpha$: $g(x) = 0$

من أجل $x \in]-1, \alpha[$: $g(x) < 0$

من أجل $x \in]\alpha, +\infty[$: $g(x) > 0$

2) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\left[(3x^2 + 6x + 3)(x+1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)\right]}{(x+1)^4}$$

ومنه $f'(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^4}$

ومنه $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}}$

ب) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$

أي $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \dfrac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 0$

المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي حامل محور الفواصل.

جـ) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$

بما أنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left(x^3 + 3x^2 + 3x - 1\right) = 1$

و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (x+1)^2 = 0$ و $(x+1)^2 > 0$

فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty}$

إذن المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مستقيم مقارب للمنحنى (Γ).

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right]$:

ومنه $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (Γ).

د)-

x	-2	α	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ 1

لدينا:

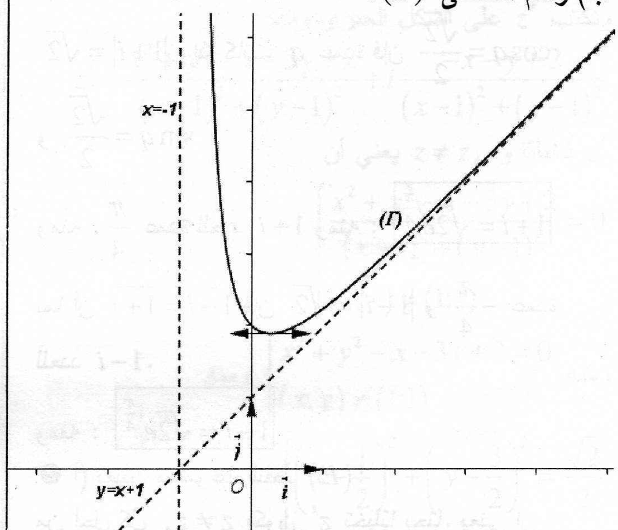
$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-1+3}{(x+1)^2}=\dfrac{g(x)+3}{(x+1)^2}$ ومنه

$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{3}{(\alpha+1)^2}$

3)-أ) تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} من أجل $\alpha=0,26$

$$f(\alpha)=\frac{3}{(1,26)^2}=1,89$$

ب) رسم المنحنى (Γ):



4)-أ) من أجل كل عدد حقيقي x ينتمي إلى المجال $]-1,+\infty[$ فإن:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}$$

أي $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ومنه

$$\boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}}$$

ب)-تعيين الدالة F :

الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ هي

الدوال: $x\to y=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+c$

الدالة F تحقق: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+c$

و $F(1)=2$

ومنه: $\dfrac{1}{2}(1)^2+1-\dfrac{1}{1+1}+c=2$ ومنه $c=1$

وبالتالي $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+1}$

إجابة الموضوع المقترح لبكالوريا 2009

التمرين رقم 01

❶ خاطئ :

لدينا : $A(-1,-1,-1)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(-2;-2;0)$

الشعاع $\overrightarrow{\Omega A}$ ناظمي للمستوي (P) لأن (P) المستوي المماس لسطح الكرة S عند النقطة A ومنه المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث .

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A}=0$ وبما أن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z+1\end{pmatrix}$ فإن :

$-2(x+1)-2(y+1)=0$

ومنه : $-2x-2y-4=0$ يعني أن معادلة المستوي (P) هي : $\boxed{x+y+2=0}$

❷ صحيح :

للمستوي (Q) شعاع ناظمي هو $\overrightarrow{\Omega B}\left(0;0;2\sqrt{2}\right)$

ومنه : $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega B}=0$ أي أن الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A}$ و $\overrightarrow{\Omega B}$ متعامدان.

إذن : المستويان (P) و (Q) متعامدان.

❸ خاطئ :

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (Q) يعني أن $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{\Omega B}=0$.

و $\overrightarrow{BM}\left(x-1;y-1;z-2\sqrt{2}+1\right)$ وبالتالي:

$z+1-2\sqrt{2}=0$ هي معادلة للمستوي (Q).

النقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى المستقيم (D) تحقق :

$x+y+2=0$ و $z+1-2\sqrt{2}=0$

وبوضع : $x=t$ نجد : $\begin{cases} x=t' \\ y=-t'-2 \quad ,t'\in\mathbb{R} \\ z=2\sqrt{2}-1 \end{cases}$

وهذا يعني أن المستقيم (D) يشمل النقطة $C\left(0;-2;2\sqrt{2}-1\right)$

من أجل $t'=0$

بتعويض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي المعطى نجد :

$\begin{cases} t=0 \\ t=4 \end{cases}$ وهذا تناقض. إذن التمثيل الوسيطي المعطى ليس للمستقيم (D).

❹ خاطئ.

معادلة (P) هي : $x+y+2=0$ و $A(-1,-1,-1)$

ومنه :

$$d\left(\Omega;(P)\right)=\frac{\left|1\times(1)+1\times(1)+0\times(1)+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+0}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

❺ صحيح.

المستقيم (ΩH) عمودي على المستقيم (D) في النقطة H وشعاع توجيه لـ (D)

هو $\vec{u}\left(1;-1;0\right)$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{\Omega H}$ و $\vec{u}$ متعامدان.

أي : $\overrightarrow{\Omega H}.\vec{u}=0$ وبما أن إحداثيات النقطة H هي من الشكل $\left(t;-t-2;2\sqrt{2}-1\right)$ لأن $H\in(D)$ ومنه

$$\overrightarrow{\Omega H}\left(t-1;-t-3;2\sqrt{2}\right)$$

ومنه $\overrightarrow{\Omega H}.\vec{u}=(t-1)-(-t-3)=2t+2$

وبما أن : $\overrightarrow{\Omega H}.\vec{u}=0$ فإن : $2t+2=0$ ومنه $t=-1$

ومنه $\overrightarrow{\Omega H}\left(-2;-2;2\sqrt{2}\right)$ وبالتالي:

$$\Omega H=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$$

ملاحظة : يمكن ملاحظة أن الرباعي ΩAHB مربع طول ضلعه $d\left(\Omega;(P)\right)=\Omega B=2\sqrt{2}$ وقطره ΩH ومنه

$$\Omega H=\sqrt{\Omega A^2+\Omega B^2}=4$$

التمرين رقم 02

❶ $(z-2i)\left(z^2-2z+2\right)=0$ أي $(z-2i)=0$ أو $\left(z^2-2z+2\right)=0$

ومنه $z=2i$ أو $z^2-2z+2=0$

مميز المعادلة $z^2-2z+2=0$:

$$\Delta=(-2)^2-4(2)=-4=(2i)^2$$

الجذران التربيعيان لـ Δ هما $2i$ ، $-2i$

ومنه حلا المعادلة : $z'=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$

و $z''=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\{1-i,1+i,2i\}$

كتابة الحلول على الشكل الأسي:

$|2i|=2$ و $\dfrac{\pi}{2}$ عمدة لـ $2i$ ومنه : $\boxed{2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$|1+i|=\sqrt{2}$ وإذا كانت q عمدة فإن $\cos q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

و $\sin q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه : $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة للعدد $1+i$ ومنه : $\boxed{1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

بما أن $1-i=\overline{1+i}$ فإن $|1-i|=\sqrt{2}$ و $-\dfrac{\pi}{4}$ عمدة للعدد $1-i$.

ومنه : $\boxed{1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

❷ أ) تعيين مجموعة النقط (E):

من أجل كل $z\neq z_A$ يكون z' تخيليّا بحتا. يعني أن

أي $\begin{cases} \arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi ,(k\in\mathbb{Z}) \\ z\neq z_A \end{cases}$

$\begin{cases} \arg\left(\dfrac{z-2i}{z-1-i}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi ,(k\in\mathbb{Z}) \\ z\neq z_A \end{cases}$

وبما أن : أي $\begin{cases} \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi ,(k\in\mathbb{Z}) \\ z\neq z_A \end{cases}$

$\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)$ ومنه

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ M\neq A \end{cases}$$

أي أن : $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \\ M \neq A \end{cases}$

إذن : المجموعة (E) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A

مركزها $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ أي $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

ونصف قطرها $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ملاحظة : يمكن استعمال طريقة أخرى وهي باستعمال الشكل الجبري ، بوضع $z=x+iy$
ونكتب z' على الشكل الجبري ونجد:

$$z'=\frac{x^2+y^2-x-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2}+i\frac{-x-y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

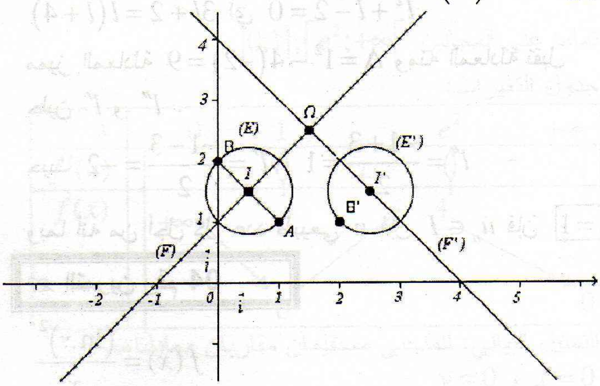
z' تخيليًا و $z \neq z_A$ يعني أن

$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2-x-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2}=0 \\ (x;y)\neq(1;1) \end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} x^2+y^2-x-3y+2=0 \\ (x;y)\neq(1;1) \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (x;y)\neq(1;1) \end{cases}$$

– نعلم أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن A فإنّ:
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$
ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}.\vec{0}=0$
إذن النقطة $B\in(E)$



ب) تعيين المجموعة (F) :
من أجل كل $z \neq z_A$ يكون $|z'|=1$ يعني أنّ:

$\begin{cases} \left|\frac{z-2i}{z-1-i}\right|=1 \\ z\neq z_A \end{cases}$ أي $\begin{cases} \frac{|z-2i|}{|z-1-i|}=1 \\ z\neq z_A \end{cases}$ أي $\begin{cases} \frac{|z-z_B|}{|z-z_A|}=1 \\ z\neq z_A \end{cases}$

أي $\begin{cases} \frac{BM}{AM}=1 \\ M\neq A \end{cases}$

أي $\begin{cases} BM=AM \\ M\neq A \end{cases}$

إذن المجموعة (F) هي محور القطعة $[AB]$.

❸أ) تعيين لاحقة كلّ من B' و I' :
إيجاد العبارة المركبة للدوران R :
لتكن النقطة M ذات اللاحقة z و M' لاحقتها z' صورتها بالدوران R :
$R(M)=M'$ يعني أن $z'=az+b$ حيث $|a|=1$
و $\arg(a)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

ومنه $a=e^{i\frac{\pi}{2}}$ وبما أن النقطة $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ مركز الدوران R فإن : $z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}z_\Omega+b$ ومنه:

$\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}\right)+b$ وبما أن $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

فإن : $\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}=i\left(\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}\right)+b$ ومنه

$\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}=i\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+b$

ومنه $b=4+i$ ومنه $z'=iz+4+i$

$R(B)=B'$ يعني أن $z_{B'}=iz_B+4+i$ أي

$z_{B'}=i(2i)+4+i$

ومنه $\boxed{z_{B'}=2+i}$ أي $B'(2;1)$

$R(I)=I'$ يعني أن $z_{I'}=iz_I+4+i$ أي

$z_{I'}=i\left(\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}\right)+4+i$

ومنه $\boxed{z_{I'}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i}$ أي $I'\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

ب) صورة الدائرة (E) ذات المركز $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ والتي تشمل النقطة $B(0;2)$ هي الدائرة (E') ذات المركز $I'\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ وتشمل النقطة $B'(2;1)$

لأن $R(B)=B'$ و $R(I)=I'$ ومنه $IB=I'B'$

صورة المستقيم (F) هي المستقيم (F') الذي يشمل النقطة $I'\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ والعمودي على المستقيم (F) في النقطة Ω لأن :

$$\Omega\in(F) \text{ و } \left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega I'}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

التمرين رقم 03

❶ أ)- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ودالتها المشتقة معرفة بـــ :

$$f'(x)=\frac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2}=\frac{5}{(x+4)^2}$$

من أجل كل $x\in I$ لدينا $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب)- ليكن $x\in I$ أي $0\le x\le 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فإن:

$f(0)\le f(x)\le f(1)$ ومنه $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$

ومنه $0\le f(x)\le 1$ ومنه $f(x)\in I$

❷ نعتبر الخاصية $u_n\in I$

من أجل $n=0$ فإن $u_0=0$ ومنه $u_0\in I$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n\in I$

يعني أن $0\le u_n\le 1$ وبما أن من أجل كل $x\in I$ لدينا : $0\le f(x)\le 1$

فإن $0\le f(u_n)\le 1$ وبما أن : $u_{n+1}=f(u_n)$

نجد أن $0\le u_{n+1}\le 1$ ومنه $u_{n+1}\in I$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\in I$.

❸ أ)- لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=\frac{u_n+2-u_n^2-2u_n}{u_n+4}=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\boxed{u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}}$$

ب) ليكن n عدداً طبيعيّا ، لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

نعلم أنه من أجل عدد طبيعي n فإن $u_n\in I$

أي $0\le u_n\le 1$ ومنه $0\ge -u_n\ge -1$

ومنه $1\ge 1-u_n\ge 0$ ومنه $1-u_n\ge 0$

ومنه $2\le u_n+2\le 3$ ومنه $u_n+2>0$ ونجد كذلك $u_n+4>0$

ينتج أن $\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}\ge 0$

إذن من أجل عدد طبيعي n لدينا $u_{n+1}-u_n\ge 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

جــ) بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى لأن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\le 1$ ومتزايدة فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

د) بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية l.

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=f(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n)$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

فإن : $l=f(l)$

إيجاد العدد l :

لدينا $l=f(l)$ يعني أن $l=\frac{3l+2}{l+4}$ أي

$3l+2=l(l+4)$ أي $l^2+l-2=0$

مميز المعادلة $\Delta=1^2-4(-2)=9$ ومنه المعادلة تقبل حلين l' و l''.

حيث $l'=\frac{-1-3}{2}=-2$ ، $l''=\frac{-1+3}{2}=1$

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\in I$ فإنّ $\boxed{l=1}$

التمرين رقم 04

$$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$$

I- ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ح ع ت

إزالتها : من أجل $x>0$ نضع $X=\ln x$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$ مع $x=e^X$

وبالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{X^2}{e^X}=0}$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^X}{X^2}=+\infty$)

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(\ln x)^2\times\frac{1}{x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$ فإن :

$$\boxed{\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty}$$

❷ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـــ :

$$f'(x)=\frac{2\ln x\times\frac{1}{x}\times x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $2\ln x-(\ln x)^2$ من أجل كل $x>0$

$2\ln x-(\ln x)^2=0$ أي $\ln x(2-\ln x)=0$

أي($\ln x=0$ أو $\ln x=2$)

أي $x=1$ أو $x=e^2$

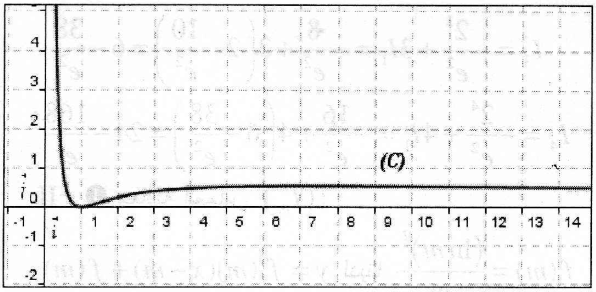
x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[1;e^2\right]$ ومتناقصة تماما على المجالين $]0;1],\left[e^2;+\infty\right[$

جدول التغيرات:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

التمثيل البياني: للمنحنى مستقيمان مقاربان معادلتاهما $x=0$ ، $y=0$



❸ أ) نضع : $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=\frac{1}{x^2}$ ومنه

$u'(x)=\frac{1}{x}$ و $v(x)=-\frac{1}{x}$

$$\left.-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}-\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}dx=-\left[\frac{\ln e^2}{e^2}-0\right]+\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}dx$$

ومنه $I_1=-\frac{2}{e^2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2}=-\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^2}+1$ ومنه

$$\boxed{I_1=1-\frac{3}{e^2}}$$

ب) لدينا : $I_{n+1}=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}$

نضع: $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ و $v'(x)=\frac{1}{x^2}$ ومنه

$u'(x)=(n+1)\frac{(\ln x)^n}{x}$

و $v(x)=-\frac{1}{x}$

$$I_n=-\left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}(n+1)\frac{(\ln x)^n}{x}\times-\frac{1}{x}dx$$

ومنه

$$I_{n+1}=-\left[\frac{\left(\ln e^2\right)^{n+1}}{e^2}-0\right]+(n+1)\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$$

ومنه $\boxed{I_{n+1}=-\frac{2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n}$

جـ) $I_2=-\frac{2^2}{e^2}+2I_1=-\frac{4}{e^2}+2\left(1-\frac{3}{e^2}\right)=2-\frac{10}{e^2}$

$$I_3=-\frac{2^3}{e^2}+3I_1=-\frac{8}{e^2}+3\left(2-\frac{10}{e^2}\right)=6-\frac{38}{e^2}$$

$$I_4=-\frac{2^4}{e^2}+4I_1=-\frac{16}{e^2}+4\left(6-\frac{38}{e^2}\right)=24-\frac{168}{e^2}$$

II- ❶ معادلة المماس (T_m):

لدينا $y=f'(m)(x-m)+f(m)$ $\quad f(m)=\frac{(\ln m)^2}{m}$

و $f'(x)=\frac{2\ln m-(\ln m)^2}{m^2}$ ومنه:

$$\boxed{y=\left(\frac{2\ln m-(\ln m)^2}{m^2}\right)x+\frac{2(\ln m)^2-2\ln m}{m}}$$

❷ المماس (T_m) يشمل المبدأ O يعني:

$$0=\frac{2(\ln m)^2-2\ln m}{m}$$

وبما أن $m>0$ فإن $2(\ln m)^2-2\ln m=0$ أي

$$2\ln m(\ln m-1)=0$$

ومنه $(\ln m=0$ أو $\ln m=1)$ أي $(m=1$ أو $m=e)$

إذن: $\boxed{m\in\{1;e\}}$

III- ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-e\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to0}\varphi_1(x)=\lim_{x\to0}x-e\ln x=+\infty$$

الدالة φ_1 قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $\varphi_1'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}$

إشارة $\varphi_1'(x)$ هي من إشارة $x-e$ ومنه الدالة φ_1 متزايدة تماما على المجال $]e;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]0;e]$.

x	0		e		$+\infty$
$\varphi_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi_1(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

❷ أ) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x)=+\infty}$

$$\lim_{x\to0}\varphi_2(x)=\lim_{x\to0}x+e\ln x=-\infty$$

الدالة φ_2 قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و : $\varphi_2'(x)=1+\frac{e}{x}=\frac{x+e}{x}$

إشارة $\varphi_2'(x)$ هي من إشارة $x+e$ ولكن $x+e>0$ من أجل كل $x>0$

إذن الدالة φ_2 متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) لدينا $\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+e\ln\left(\frac{1}{2}\right)\simeq-1{,}36$

و $\varphi_2(1)=1+e\ln1=1$

بما أن الدالة φ_2 مستمرة على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$

و $\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)<0<\varphi_2(1)$

فإن المعادلة $\varphi_2(x)=0$ تقبل حلا α على الأقل في المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ وبما أن الدالة φ_2 متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ فإن α حلّ وحيد.

جـ) بما أنّ الدالة φ_2 مستمرة متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن المعادلة $\varphi_2(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على هذا المجال.

❸ تعيين نقط تقاطع (Δ) و (C):

من أجل كل $x>0$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{1}{e^2}x$ أي

$e^2(\ln x)^2=x^2$ أي: $x^2-e^2(\ln x)^2=0$ أي

$(x-e\ln x)(x+e\ln x)=0$ أي $\varphi_1(x)\times\varphi_2(x)=0$

أي $(\varphi_1(x)=0$ أو $\varphi_2(x)=0)$ أي $(x=e$ أو $x=\alpha)$

إذن (Δ) و (C) يتقاطعان في النقطتين $\left(e;\frac{1}{e}\right)$ ، $\left(\alpha;\frac{\alpha}{e^2}\right)$.

اللهم نجّحنا في الامتحان

آمين

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة